

n-PSK 信号における量子最適決定作用素の導出と Square-root Measurement の基礎研究

Comparison of quantum minimax solution and Standard Quantum Limit for n-PSK

AC10 丸山信
指導教員 清水哲也, 島川陽一

1. はじめに

量子信号の測定過程において量子確率に基づく量子雑音が発生する。従来の信号検出理論ではこの量子雑音を信号が伴う古典確率に基づいた古典雑音と同等に扱ってしまう。一方で量子信号検出理論では信号の測定・決定過程を量子力学で記述し、最適化することによって、量子雑音の影響を低減することが可能となる。その結果、従来の信号検出理論よりも優れた性能を与える可能性がある。本研究では、量子信号検出理論を理解するために、標準量子限界と量子ミニマックス解について理解を進め、BPSK, 3PSK, 4PSK において比較をする。

2. 量子ミニマックス決定規範

従来の信号検出理論におけるミニマックス決定規範を示し、その後、量子ミニマックス決定規範を示す。送信シンボルの生起確率 $\{\xi_i\}$ が受信側において未知の場合に、誤り率を最小にする決定関数 $\{\pi_j(\alpha)\}$ を定める規範をミニマックス決定規範と呼ぶ。ミニマックス決定規範において、送信者は誤り率を最大とするような信号の生起確率を、逆に受信者は誤り率を最小とするような決定関数を求める問題となり、その結果、得られる誤り率 $P_{e,M}$ はミニマックス解と呼ぶ。

$$P_{e,M} = \min_{\{\pi\}} \max_{\{\xi\}} P_e = \max_{\{\xi\}} \min_{\{\pi\}} P_e \quad (1)$$

量子ミニマックス決定規範の概念は式(1)の関係式で表される。これに基づく決定作用素の必要十分条件は以下ようになる[1]。

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_j [\xi_j \hat{\rho}_j - \xi_i \hat{\rho}_i] \hat{\Pi}_i &= 0, & \forall i, j, \\ \hat{\Gamma} - \xi_i \hat{\rho}_i &\geq 0, & \forall i, \\ \text{Tr} \hat{\Pi}_i \hat{\rho}_i &= \text{Tr} \hat{\Pi}_j \hat{\rho}_j, & \forall i, j \end{aligned} \quad (2)$$

この量子ミニマックス決定規範は量子ベイズ決定規範と比較して最適決定作用素の導出過程を簡単化できることが明らかになっている[2]。

3. 標準量子限界

前節で示した量子信号決定規範によって予言される誤り率は von Neumann が定式化した標準量子測定とそれに続く決定過程によって得られる誤り率を自動的に下まわる。それは信号検出過程を確率作用素測度に一般化することによって得られた結果である。それでは確率作用素測度を導入しない、いわゆる標準量子測定によって達成可能な最小誤り率はどのように決まるのか。ここでは、その限界を「標準量子限界 (Standard Quantum Limit : SQL)」と呼び、その定義を示す。

定義 1

ある量子信号系 $\{\hat{\rho}_i\}$ が与えられるとき、その信号量子状態を特徴づける物理量のスペクトル分解と決定関数によって標準決定作用素が定まる。これらの標準決定作用素によって得られる誤り率の中で最小の誤り率を、設定された量子信号系に対する標準量子限界という。

4. BPSK

信号量子状態を次式で表す。

$$\hat{\rho}_1 = |\phi_1\rangle \langle \phi_1|, \hat{\rho}_2 = |\phi_2\rangle \langle \phi_2| \quad (3)$$

ここで、生起確率を ξ_1, ξ_2 とする。標準量子限界によって達成される誤り率は次式で与えられる。

$$P_{e,SQL} = \text{Erfc} \left[\sqrt{4|\alpha|^2} \right] \quad (4)$$

ただし、 $\text{Erfc}[x]$ は補誤差関数である。一方で、量子信号検出理論による誤り率は、量子ミニマックス解として次式で表される。

$$P_{e,M} = \frac{1 - \sqrt{1 - \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle^2}}{2} \quad (5)$$

図に $P_{e,SQL}$ と $P_{e,M}$ の比較を示す。

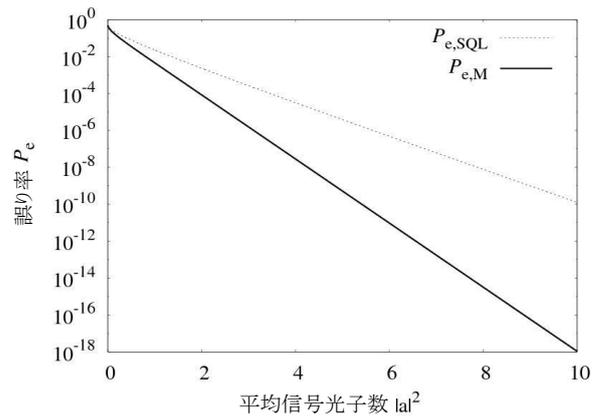


図 1 BPSK 信号の標準量子限界と量子ミニマックス解

5. まとめ

今回は、BPSK, 3PSK, 4PSK の具体例を示すことができた。今後は、PSK だけでなく QAM などの信号系にも挑戦したいと思う。さらに、信号量子状態が決定すれば自動的に確率作用素測度を与える Square Root Measurement についても理解を進めたい。

文献

- [1] O. Hirota, and S. Ikehara, The Trans. IEICE Japan, vol.E65, pp.627633, 1982.
- [2] M. Osaki, M. Ban, and O. Hirota, Phys. Rev. A, vol.54, no.2, pp.16911701, 1996