5203

一般相対性理論を考慮した重力場中の物体の運動シミュレーション

Motion simulation of a particle in gravitational fields with general relativity

S10528　本多優太
指導教員　山野辺基雄

1. 緒言

本研究は重力場中の物体の動きについて検証を行うことを目的とする.

重力理論には，ニュートン力学の万有引力の法則と一般相対性理論の二つの理論がある. 前者では，三次元の空間は観測者によって異なるが，時間はどの観測者にとっても同じなので空間と時間を別々に扱う. また，運動方程式において，重力は外場として現れる. 一方，後者では時間も観測者によって異なるので，三次元の空間に時間を合わせた四次元時空を考える必要がある. 二つの理論を比較した場合，惑星の軌道に違いが生じることが知られているので，実際に数値計算を行いこれを確認する. その後，一般相対性理論で様々なケースを数値計算し解いていく.

2. 研究のアプローチ

＜最小作用の原理＞

力学系の最も一般的な定式化として，最小作用の原理というものがある. この原理はラグランジアンと呼ばれる関数によって特徴づけられており，この関数の作用積分が最小になるような軌道をとるように物体は運動するという原理である. 最小作用の原理を用いることにより，ラグランジュ方程式という微分方程式を求めることができる. これは運動方程式として知られている.

＜ニュートンの万有引力＞

万有引力の場合のラグランジアンは

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}) + G\frac{Mm}{r} \quad \cdots(1)$$

である. (1)式から求められる万有引力の運動方程式は,

$$\theta \text{ 方向} \quad : \mathrm{m}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \cdots(2)$$

$$\text{r方向} \quad : \mathrm{m}\frac{d}{dt}(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2) = -G\frac{Mm}{r^2} \quad \cdots(3)$$

である. (2), (3)式を解くことで物体の運動が決まる.

＜一般相対性理論＞

一般相対性理論では，測地線方程式とアインシュタイン方程式を解くことにより物体の運動が決まる.

測地線方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0 \cdots(4)$$

アインシュタイン方程式:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{C^4}T_{\mu\nu} \cdots(5)$$

ここで$G_{\mu\nu}$はアインシュタインテンソル，$T_{\mu\nu}$はエネルギーテンソルである.

本研究ではアインシュタイン方程式の解として静的，球対称なシュヴァルツシルト時空を採用する.

＜数値計算＞

数値計算を行う際には4次のルンゲクッタを使用した. また惑星の質量などの膨大な量を単純にするために，単位換算を行った.

3. 結　果

数値計算を行った際の惑星の運動について以下に示す.

①Newton 力学

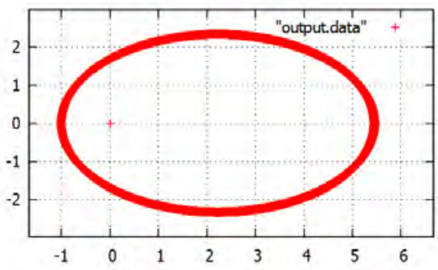

図 1　万有引力での惑星の軌道

図 1 の初期条件は位置 (-1.0,0.0)，初速度 (0.0,-1.3)で行った結果である.

②一般相対性理論

現在計算中.

4. 結　論

万有引力による惑星の移動については，図 1 のように閉じた楕円を確認することができた.

5. 今後の発展

一般相対性理論でシュヴァルツシルト以外の時空について数値計算で解いていく.

文　献

[1]Raymond A.Serway, “”科学者と技術者のための物理学 I b 力学･波動”, 学術図書出版社, PP. 370
[2]ランダウ=リフシッツ,”力学”,東京図書,PP.2-12
[3]東京理科大学理学部第 2 部物理学科｢相対論｣講義ノート
[4]橋本正章，荒井賢三，“相対論の世界”，裳華房，PP133-157
[5]入江庄一，“重力レンズ効果を想定した回転ブラックホール周りの粒子の軌道”，大阪工業大学　卒業論文