

1. 緒言

数式処理は、計算機で“変数を含む式”をそのまま計算を行うことが可能である。数値計算と違い、誤差なく計算可能であるが、保持するデータ量が多いが故に演算速度が遅いという欠点もある。本研究では数式処理での行列演算の高速化のための速度要因の解明を目指す。

本科の卒業研究(参考文献 [1])では、数式処理システム Risa/Asir(以下, Asir)上で、表 1 に示す 2 つの逆行列を求めるアルゴリズムの演算速度を比較した。そこでは、数式処理においてはアルゴリズムの計算量は関係せず、アルゴリズム内の演算の特徴によって計算時間が変わるという結論を得た。本研究では、高速化要因の追求のため各種実験を行い、計算時の詳細な挙動の分析をする。それにより、数式処理においてどのような要因が演算速度を決定しているのかを考察する。

表 1 使用するアルゴリズム

項目	アルゴリズム	
	消去法	余因子による逆行列演算
計算量	$O(n^3)$	$O(n!)$
演算の特徴	乗除を含む	除算を含まない

2. 研究のアプローチ

卒業研究で扱った逆行列演算は、所要時間の多くは行列式を求めるところに集約されている。したがって、要因追求は Asir における行列式演算に焦点を絞る。

実験項目を数種類分け、以下の流れで実験を行っていく。実験用行列は数種類用意した。用いるアルゴリズムは、消去法と余因子展開である。

I. 演算速度の比較

II. 詳細な挙動の分析

III. 演算中の項数の増加と係数出現回数の計測

I では、卒業研究の速度比較実験を再度行い、傾向を確認する。II で、両アルゴリズムの挙動を詳細に分析することで、速度要因の足掛かりを調査する。III にて、演算速度に深く関係があると考えられる、項数と係数について計測する。

3. 結果および考察

I の演算速度比較実験では、卒業研究同様、消去法は要素に 1 桁の整数や 1 変数多項式を持つ行列で、余因子展開は要素に多変数多項式を持つ行列で高速に動作した。

次に実験 II でアルゴリズムを詳細に分析する。まず消去法の動作を 3×3 のファンデルモンド行列の例で確認する。

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & 0 & (y-x)(z^2-x^2)-(z-x)(y^2-x^2) \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

上記のように、消去の操作を行う過程において、多項式同士の演算が多く発生し、項数が多くなってしまっている。

一方で余因子展開は、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y & y^2 \\ z & z^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x & x^2 \\ z & z^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x & x^2 \\ y & y^2 \end{pmatrix} = (y-x)(z^2-x^2) - (z-x)(y^2-x^2)$$

となり、計算途中で項数が膨らむことなく演算が行われる。これらより、要素同士の演算の際の項の膨張が演算速度に大きな影響を与えるとも考えられる。また、要素の係数値によっては大きな値も取ると考えられる。

最後に実験 III で項数と係数についてのデータを計測した。演算中の項の膨張と n 桁の係数が出現した回数 of 2 項目を計測し、メモリ上で占有されている使用量を求めた。また、メモリ使用量にも実験 I で見られた傾向が確認できた。ここで、メモリ使用量のうち占める割合の高い項目を調べると、消去法は項数、余因子展開は係数のデータが大きな割合を占めていることがわかった。実験 II で確認したように、余因子展開は項の膨張が結果的に抑えられるため、係数の出現回数が演算速度に深く関係していると考えられる。また、消去法は項が膨張しやすいため、項の膨張が速度要因として深く関係していると考えられる。演算速度の面だけでなく、項数および係数の出現回数が小さく抑えられる場合は、より大きなサイズの行列まで演算を行うことが可能であると言える。

4. 結論

複雑な行列に対しては余因子展開が高速に動作した。消去法のメモリ使用量は項の膨張の割合が高く、余因子展開では係数の出現回数の割合が高い。つまり、係数の出現回数は重みが小さく、より項の膨張の方に重みがあると言える。よって、卒業研究での結論や 3 章より、行列演算の速度を決める要因は、第一、第二に項の膨張や係数の出現回数等の空間計算量、第三に時間計算量であると結論付けられる。

参考文献

- [1] 北村 竜之介, 大墨 礼子, 近藤 祐史, 村尾 裕一, 齋藤 友克; Risa/Asir の行列演算高速化の試み”, 数式処理 Bulletin of JSSAC, Vol.21, No.1, pp17-23, 日本数式処理学会, 2015.