

乗合タクシーにおける移動距離の数理モデル解析

小酒井雄一¹, 島川陽一²

Mathematical Model Analysis of Travel Distances in Shared Taxis

Yuichi Kozakai, Yoichi Shimakawa

Abstract

This study investigates how transporting multiple passengers simultaneously affects the travel distance of a shared taxi, a transport mode widely used in Southeast Asia. While previous studies mainly considered one or two passengers, we develop a generalized mathematical model allowing an arbitrary number of passengers and analyze how the travel distance varies with passenger count.

The city is modeled as a circular disk, and passenger origins and destinations are assumed to be independently and uniformly distributed. Additional passengers are accepted only when their destinations do not hinder the approach to existing passengers' destinations, which geometrically constrains feasible locations.

Using Crofton's differential equation, we derive the probability density function of distances between two random points and obtain the baseline expected travel distance. Distance multipliers for multiple passengers are then formulated and generalized via a recurrence relation. Assuming passenger arrivals follow a Poisson distribution, the overall expected travel distance is evaluated.

The results indicate that although travel distance increases with passenger count, the increase converges to a finite limit, implying that ride sharing leads to only moderate additional travel distance.

1 はじめに

東南アジアでは「乗合タクシー (shared taxi)」と呼ばれる交通手段が広く利用されている。乗合タクシーとは、乗客を乗せて移動している途中で、同一方向へ向かう追加の乗客を乗せる仕組みをもつ輸送形態である。ただし、既に乗車している乗客の目的地への移動を著しく妨げるような経路となる場合には、新たな乗客は乗せない。複数の乗客を乗せている場合、タクシーは各乗客の目的地に近い順に訪問する。

このため既存の乗客にとっては、他の乗客を輸送することにより一定の遠回りが生じる可能性がある。一方、運転手側から見れば複数の乗客を同時に輸送できるため運行効率が向上し、料金も比較的安く設定されることが多い。

タイなど公共交通網が十分でない地域では、図1に示すシーローや図2のテンソウといった乗合型交通手段が都市内移動に広く利用されている。日本では長らく乗合タクシーは制度上制限されてい

たが、近年はライドシェア需要の高まりに伴い徐々に導入が進んでいる。

本研究では、乗合タクシーによる移動が通常のタクシー移動と比較してどの程度距離が増加するのかを数理的に分析する。既存研究[1, 2]では乗客数1および2の場合の移動距離が求められているが、本研究ではそれらを踏まえ、より一般化されたモデルを構築し、乗客数増加に伴う移動距離特性を明らかにすることを目的とする。

本研究では、確率論の観点から乗合タクシーの移動距離を理論的に解析する。



図1 シーロー



図2 テンソウ

¹豊橋技術科学大学

²サレジオ工業高等専門学校情報工学科

2 乗合タクシーの移動距離の数理モデル化

2.1 モデル化の仮定

一般的にタクシーは決められた営業区域内を走行する。そこで直径2の円盤状の都市を考え、その内部で1台の乗合タクシーが移動を行う。道路の形状や地形に依存しない移動を想定する。すなわち、このタクシーは都市内部を客を乗せた起点から目的地へ向かって直線的に移動するものとする。道路網を想定しない目的地までの直線移動というモデルとして単純化しすぎなようにも思えるが、この研究では通常のタクシーでの移動距離と乗合タクシーでの移動距離との比こそが重要なので、乗合タクシーの移動距離そのものがいくつになるかは問題としない。この直線距離を用いた計算により、移動距離の数値自体は実際の乗合タクシーの移動に対して0次近似ではあるが、この研究ではこの単純化したモデルを受け入れるものとする。この研究では特定の都市を想定していない。乗客の発生はPoisson分布になると仮定する。タクシーの最大乗客数はあえて設定しない。Poisson分布では乗客数が多いほど発生確率が低くなる。各乗客の発生は以下ようになる。

- 1組目の乗客(乗客1)の起点と終点(乗り始めと乗り終わり)の位置は都市内部の互いに独立で一様な地点に発生するものと設定する。
- 2組目の乗客(乗客2)の起点は、乗客1の起点から終点までの区間のどこかで発生し、乗客2の終点は、「乗客1の移動を妨げない領域」に発生する。
- 3組目以降の乗客は乗客2と同様に、前の乗客が乗り始めてから乗客1の終点に向かうまでの区間で起点が発生し、「既に乗車している全ての客の移動を妨げない領域」に終点が発生する。

この乗合タクシーの行動例を図3に示す。

ここで、「既に乗車している客の移動を妨げない領域」とは具体的にどこなのか？ 図3の真ん中の移動を取り出して、乗客2の終点として取り得る領域を図4に青色で表現する。乗客2は、乗客1の移動を邪魔しない範囲に移動する。すなわち、タクシーの運転手は「乗客1の運搬のついでに乗客2を(選択して)運搬する」考えを持つだろう。とすれ

ば、「乗客1が不平を言わない範囲」、終点1までの距離が短くなる範囲にだけタクシーは向かうと考えて良い。その範囲とは起点2から終点1までを半径とする円を、起点2中心と終点1中心に描いたその共有領域である。この範囲であれば、どこに進んでも終点1中心の円の内側であるため終点1までの距離が乗客2の登場時点より短くなり、既に乗っている客の移動を妨げていない。しかしながら、遠回りには違いがないので乗客1は最短で自分の終点に到着するわけではない。図4では計算を簡単化するため、円の交点と起点2を結んだ直線で領域を構成している。二つの円の半径が同一であることから領域は中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇型となる。

起点1が終点2より手前に発生し、かつ終点2が終点1よりも奥に発生する場合は本研究では考えない。一般的に、終点2が終点1よりも奥(図4では左側)に発生するのは、乗合タクシーの移動としては起こり得る。乗客1の移動も乗客2の移動もどちらも妨げられず、実際の乗合タクシーではその移動先は許される。しかしながら、この研究では数学的に扱いやすくするため、この場合を考慮しないこととする。非常に強い仮定ではあるが、この研究においては乗合タクシーは既に乗車している客よりも近い位置を目的地とする追加の客を乗せてLIFOで移動し、かつ追加の乗客は前の乗客が発生した区間で発生する(乗客3が[起点2,終点2]区間で現れた場合乗客3はその区間で現れる)ものとして、乗客1から見た移動距離(タクシーから見た移動距離とも言える)の変化について着目するものとする。

次に、乗客2の起終点の発生位置の確率分布についても検討しておこう。全ての乗客は都市内部に独立な点として一様に発生するが、乗合タクシーが実際に乗せる乗客は「既に乗車している客の移動を妨げない領域」に向かうという点を考慮しなければいけない。その領域(図4の青い領域)は当然、起点2が終点1に近づくほど小さくなるので、実際に乗せる乗客の起点2は起点1に近い位置に発生しやすい。すなわち、実際に乗せる乗客の起点2の位置の確率分布は終点2の位置が条件となる条件付き確率であり、起終点は独立に決定されない。これらを踏まえた上で後続する乗客の起終点発生位置の具体的な確率分布は第3章にて求める。

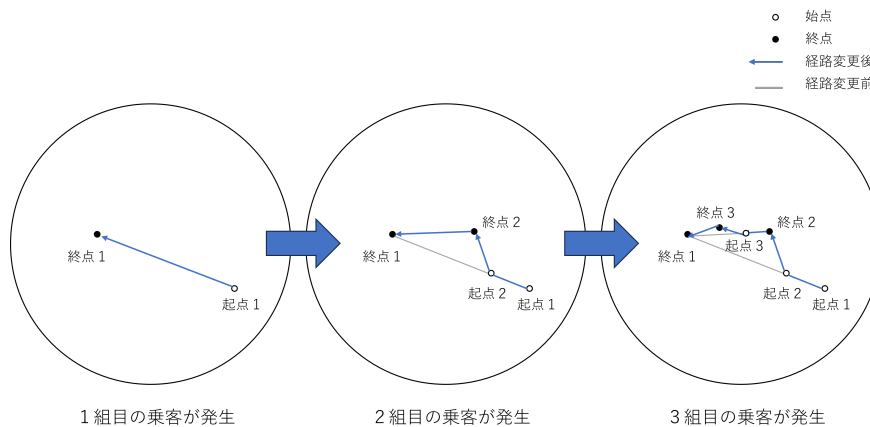


図3 乗合タクシーの行動例

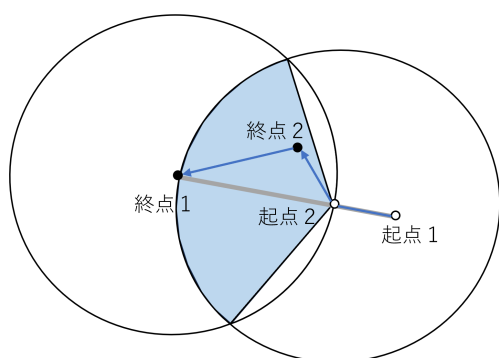


図4 終点2の発生範囲

2.2 検討の方針

この章では確率論に基づいて解析解を導出する。乗合タクシーの移動距離の期待値を X とおく。問題を以下のように分割して考える。

乗客 i の移動距離の期待値を x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)とおく。タクシーは乗客がないときは決められた位置に待機しており、乗客が表れて運搬を開始し、すべての乗客をその終点に送り届けて、待機場所に戻るものとする。これを1回の出動とする。1回の出動で運搬する乗客数が i 人ちょうどになる確率を P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)とおく。 X は次のように表現できる。

$$X = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots$$

距離の期待値は確率変数と確率密度関数をかけて積分すれば求まるので、乗客数ごとの移動距離

の期待値 x_i は以下の積分で与えられる。

$$x_i = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x) f_X(x) dx \quad (1)$$

本研究においては $f_X(x)$ は直径2の円盤上でのランダムな2点(乗客1の起終点)の距離 x の確率密度関数で、 $g_i(x)$ は2点の距離 x が定まった上で乗客数 i の場合に遠回りする移動距離全体の期待値である。つまり $g_i(x)$ は x が定数倍される関数となっている。その x の係数こそが通常のタクシーでの移動距離と比べた、乗合タクシーでの乗客数 i における移動距離の増加率である。 $f_X(x)$ は乗客1の起終点距離の確率密度関数なのでタクシーの乗客数に依らず同一の関数となる。

一般的に確率密度関数 $f_X(x)$ を直接的に求めるには「クロフトンの微分方程式」を用いる。この微分方程式とは特定が難しい確率密度関数を見つける方法である。文献[3]によると、クロフトンの微分方程式とは「対象領域のスケールパラメタ α に関する f の微係数を定式化し、その結果得られる1階線形微分方程式を解く」という手法である。すなわち、 $f_X(x)$ の微分を式にして、それを積分することで $f_X(x)$ を得る。以下の節ではこの考え方に沿って解析解を求める。

3 計算からのアプローチ

3.1 確率密度関数 $f_X(x)$ の導出

以下では $f_X(x)$ の導出をしていこう*1。ここでは

*1 より詳細には文献[3][4]を参照されたい。

「クロフトンの微分方程式」の考え方にに基づき定式化する。都市の大きさを変数にして、その値を少し大きくしたときの f の変化に注目する。

半径 α の円盤A上で一様に分布する2点間の直線距離を x とし、その確率密度関数を $f(x, \alpha)$ とおく。これを図5に示す。 $f(x, \alpha)$ の微分係数を求めるために、半径を $\Delta\alpha$ 増加させたときの円盤Cの確率密度関数を考える。増加した領域はリングBとする。半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤C上で一様に分布する2点間の直線距離 x の確率密度関数を $f(x, \alpha + \Delta\alpha)$ とする。円盤A, リングBの面積はそれぞれ $S, \Delta S$ とおく。円盤Aは半径が α の円なので当然面積は $S = \pi\alpha^2$ であるし、円盤Cは半径が $\alpha + \Delta\alpha$ の円なので面積は $\pi(\alpha + \Delta\alpha)^2$ であるので、リングBの面積は $S = \pi(\alpha + \Delta\alpha)^2 - \pi\alpha^2 = \pi(2\alpha\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2)$ である。

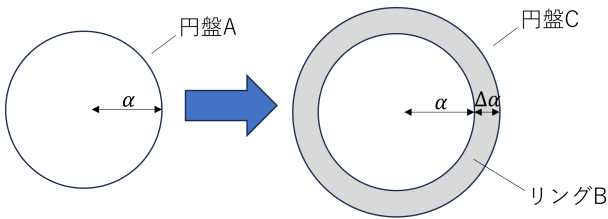


図5 都市の半径を増加

円盤C上の移動の種類を分類し、どの領域からどの領域への移動がどれだけ起きやすいかを考える。領域A, B間を移動する直線距離 x の確率密度関数は $g(x, \alpha, \Delta\alpha)$ とにおいて、領域B内部からB内部へ移動する直線距離 x の確率密度関数を $h(x, \alpha, \Delta\alpha)$ とおく。

全体の面積の対象としている領域の面積が占める割合を確率と考える。表1では面積は測度に相当する。起点・終点の組み合わせについてそれぞれ領域の面積を求めて、組み合わせを考慮してそれらを掛け合わせる。それを全体の面積(測度)で割った、全測度に占める割合が対応する移動の種類が選ばれる確率である。

以上から $f(x, \alpha + \Delta\alpha)$ を $f(x, \alpha)$, $g(x, \alpha, \Delta\alpha)$, $h(x, \alpha, \Delta\alpha)$ を用いて表すと、

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) = \frac{S^2}{(S + \Delta S)^2} f(x, \alpha) + \frac{2S\Delta S}{(S + \Delta S)^2} g(x, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{(S + \Delta S)^2} h(x, \alpha, \Delta\alpha)$$

である。両辺に $\frac{(S + \Delta S)^2}{S^2}$ をかけると、

$$\frac{(S + \Delta S)^2}{S^2} f(x, \alpha + \Delta\alpha) = f(x, \alpha) + \frac{2\Delta S}{S} g(x, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2} h(x, \alpha, \Delta\alpha)$$

となる。 $(S + \Delta S)^2$ を展開すると、

$$\frac{S^2 + 2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2} f(x, \alpha + \Delta\alpha) = f(x, \alpha) + \frac{2\Delta S}{S} g(x, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2} h(x, \alpha, \Delta\alpha)$$

となる。 $\frac{S^2}{S^2} = 1$ なので、

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2} f(x, \alpha + \Delta\alpha) = f(x, \alpha) + \frac{2\Delta S}{S} g(x, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2} h(x, \alpha, \Delta\alpha)$$

となる。左辺の第二項と右辺の第一項をそれぞれ移項して整理すると、

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = -\frac{2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2} f(x, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2\Delta S}{S} g(x, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2} h(x, \alpha, \Delta\alpha)$$

となる。ここで、両辺を $\Delta\alpha$ で割ると、

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = -\frac{2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2\Delta\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2\Delta S}{S\Delta\alpha} g(x, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2\Delta\alpha} h(x, \alpha, \Delta\alpha)$$

となり、左辺が微分の定義式の形と同一になる。ここで、 $S = \pi\alpha^2, \Delta S = \pi\Delta\alpha(2\alpha + \Delta\alpha)$ であることに注意してリングBを限りなく細く($\Delta\alpha \rightarrow 0$)すると各項の係数は次のようになる。 $f(x, \alpha + \Delta\alpha)$ の係数は

$$-\frac{2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2\Delta\alpha} = -\frac{2\pi^2\alpha^2(2\alpha\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2)}{\pi^2\alpha^4\Delta\alpha} - \frac{\pi^2(\Delta\alpha)^2(2\alpha + \Delta\alpha)^2}{\pi^2\alpha^4\Delta\alpha} = -\frac{4\alpha + 2\Delta\alpha}{\alpha^2} - \frac{\Delta\alpha(2\alpha + \Delta\alpha)^2}{\alpha^4} \rightarrow -\frac{4}{\alpha}$$

表1 移動の種類ごとの割合と確率密度関数

起終点ペアの種類	測度(ペアの量)	全測度に占める割合	x の確率密度関数
A→A	S^2	$\frac{S^2}{(S+\Delta S)^2}$	$f(x, \alpha)$
A→B or B→A	$2S\Delta S$	$\frac{2S\Delta S}{(S+\Delta S)^2}$	$g(x, \alpha, \Delta\alpha)$
B→B	$(\Delta S)^2$	$\frac{(\Delta S)^2}{(S+\Delta S)^2}$	$h(x, \alpha, \Delta\alpha)$
C→C (全体)	$(S + \Delta S)^2$	1	$f(x, \alpha + \Delta\alpha)$

となる。また、 $g(x, \alpha, \Delta\alpha)$ の係数は、

$$\frac{2\Delta S}{S\Delta\alpha} = \frac{2\pi\Delta\alpha(2\alpha + \Delta\alpha)}{\pi\alpha^2\Delta\alpha} = \frac{2\pi(2\alpha + \Delta\alpha)}{\pi\alpha^2} \rightarrow \frac{4}{\alpha},$$

$h(x, \alpha, \Delta\alpha)$ の係数は、

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta S)^2}{S^2\Delta\alpha} &= \frac{\pi^2(\Delta\alpha)^2(2\alpha + \Delta\alpha)}{\pi^2\alpha^4\Delta\alpha} \\ &= \frac{\pi^2\Delta\alpha(2\alpha + \Delta\alpha)}{\pi^2\alpha^4} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} &\rightarrow \frac{d}{dx}f(x, \alpha) \\ g(x, \alpha, \Delta\alpha) &\rightarrow g(x, \alpha, 0) \\ h(x, \alpha, \Delta\alpha) &\rightarrow h(x, \alpha, 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\frac{d}{d\alpha}f(x, \alpha) = -\frac{4}{\alpha}f(x, \alpha) + \frac{4}{\alpha}g(x, \alpha, 0) \quad (2)$$

を得る。以上が「クロフトンの微分方程式」である。

$g(x, \alpha, 0)$ を検討する。 $g(x, \alpha, 0)$ とは領域Aから領域Bまたは領域Bから領域Aの移動距離 x の確率密度関数である。領域Bを限りなく小さくしたので、移動は円盤上の点と円周上の点との移動になっている。測度で分かるように、 $g(x, \alpha, 0)$ を求めるには片方だけを考えれば良いので領域Bから領域Aだけを考える。また、移動の起点をどこか特定の円周上の点に固定しても一般性は失われないので一点に固定する。図6に示すように、 $g(x, \alpha, 0)$ とは、起点から半径 x の円周が半径 α の円盤上の点と交わった部分の長さ $L(x)$ を、円盤の面積 S で除算することにより得られる。

この図において、円盤A上の点が半径 x の円周と交わっている数を、円盤A上の点の数全体で除算することにより $g(x, \alpha, 0)$ を得ることができる。

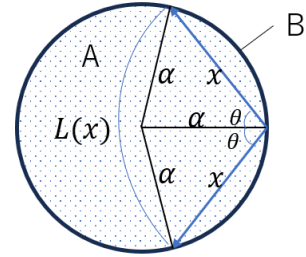


図6 リングB上から円盤Aへの移動

$L(x)$ は、

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x \cos\theta \\ &\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{2\alpha} \\ &\Rightarrow \theta = \arccos \frac{x}{2\alpha} \\ &\Rightarrow L(x) = 2x \arccos \frac{x}{2\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。これを円盤の面積で割れば、

$$g(x, \alpha, 0) = \frac{2x}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{x}{2\alpha} \quad (4)$$

と $g(x, \alpha, 0)$ が求まるので、式(4)を式(2)に代入すると、

$$\frac{d}{d\alpha}f(x, \alpha) + \frac{4}{\alpha}f(x, \alpha) - \frac{8x}{\pi\alpha^3} \arccos \frac{x}{2\alpha} = 0$$

を得る。この微分方程式は1階線形方程式であるので解析的に解くことが可能である。これは変数 α に関する微分方程式であり、 x は定数として扱えるので変数 x は省略して $f(x, \alpha) = y$ とすると、この場合の1階線形方程式 $\frac{dy}{d\alpha} + p(\alpha)y = q(\alpha)$ の解は以下のようになる。

$$y = e^{-\int p(\alpha)d\alpha} (C + \int q(\alpha)e^{\int p(\alpha)d\alpha} d\alpha)$$

さらに、

$$\begin{aligned}
 y &= e^{-\int \frac{4}{\alpha} d\alpha} \left(C + \int \frac{8x}{\pi\alpha^3} \arccos\left(\frac{x}{2\alpha}\right) e^{\int \frac{4}{\alpha} d\alpha} d\alpha \right) \\
 &= e^{-4\log\alpha} \left(C + \int \frac{8x}{\pi\alpha^3} \arccos\left(\frac{x}{2\alpha}\right) e^{4\log\alpha} d\alpha \right) \\
 &= \alpha^{-4} \left(C + \int \frac{8x}{\pi\alpha^3} \arccos\left(\frac{x}{2\alpha}\right) \alpha^4 d\alpha \right) \quad (5) \\
 &= \frac{C_1}{\alpha^4} + \frac{8x}{\pi\alpha^4} \int \alpha \arccos\left(\frac{x}{2\alpha}\right) d\alpha
 \end{aligned}$$

となる。第二項の積分を I とおく。

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{C_1}{\alpha^4} + \frac{8x}{\pi\alpha^4} \int \alpha \arccos\left(\frac{x}{2\alpha}\right) d\alpha \\
 &= \frac{C_1}{\alpha^4} + \frac{8x}{\pi\alpha^4} I
 \end{aligned}$$

ここで I は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 I &= \int \alpha \arccos \frac{x}{2\alpha} d\alpha \\
 &= \int \left(\frac{1}{2}\alpha^2\right)' \arccos \frac{x}{2\alpha} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^2 \arccos \frac{x}{2\alpha} - \int \frac{1}{2}\alpha^2 \left(-\frac{\frac{x}{2\alpha^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4\alpha^2}}}\right) d\alpha \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^2 \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{1}{2}x \int \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha^2-x^2}} d\alpha \quad (6) \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^2 \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{1}{2}x \left(\frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2-x^2} + C_2\right) \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^2 \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{1}{8}x\sqrt{4\alpha^2-x^2} - \frac{1}{2}xC_2
 \end{aligned}$$

式(6)を式(5)に代入する。

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{8x}{\pi\alpha^4} \left(\frac{1}{2}\alpha^2 \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{1}{8}x\sqrt{4\alpha^2-x^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}xC_2 \right) + \frac{C_1}{\alpha^4} \\
 &= \frac{4x}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{x^2}{\pi\alpha^4} \sqrt{4\alpha^2-x^2} + \frac{C_1}{\alpha^4} \\
 &\quad - \frac{4x^2C_2}{\pi\alpha^4} \\
 &= \frac{4x}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{x^2}{\pi\alpha^4} \sqrt{4\alpha^2-x^2} \\
 &\quad + \frac{C_1-4x^2C_2}{\alpha^4}
 \end{aligned}$$

ここまで変数 α に関する微分方程式であったので変数 x は省略していたが、 C_1, C_2 は x の関数である。

ここで、第三項の分子を $C(x) = C_1 - 4x^2C_2$ と一つの文字にまとめる。微分方程式の一般解は

$$y = f(x, \alpha) = \frac{4x}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{x^2}{\pi\alpha^4} \sqrt{4\alpha^2-x^2} + \frac{C(x)}{\alpha^4}$$

と求まる。

初期条件について検討しよう。 $x = 2\alpha$ のとき、すなわちリング上から正反対の一点への移動は、確率密度関数の特性上厳密に $f(x, \alpha) = 0$ である。よって $\alpha = \frac{x}{2}$ のときに $f(x, \alpha) = 0$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
 f\left(x, \frac{x}{2}\right) &= \frac{4x}{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2} \arccos \frac{x}{2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{x^2}{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^4} \sqrt{4\left(\frac{x}{2}\right)^2-x^2} + \frac{C(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^4} = 0 \\
 &= \frac{1}{\pi x} \arccos 1 - \frac{16}{\pi x^2} \sqrt{x^2-x^2} + \frac{16C(x)}{x^4} = 0 \\
 &= \frac{16C(x)}{x^4} = 0
 \end{aligned}$$

である。よって $C(x) = 0$ である。また、 α は変化しないので関数の変数から削除し、 $f(x)$ とする。これで「半径 α の円盤上で一様に分布する2点間の直線距離の確率密度関数」が以下のように得られる。

$$f(x) = \frac{4x}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{x^2}{\pi\alpha^4} \sqrt{4\alpha^2-x^2} \quad (0 \leq x \leq 2\alpha)$$

本研究では都市を直径2の円盤としているので半径 $\alpha = 1$ を代入する。

$$f_X(x) = \frac{4x}{\pi} \arccos \frac{x}{2} - \frac{x^2}{\pi} \sqrt{4-x^2} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

これから確率密度関数 $f_X(x)$ が求まる。この関数を図7に示す。

この確率密度関数 $f_X(x)$ の平均を計算する。 $f_X(x)$ と x の積を $[0, 2]$ の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \int_0^2 x \left(\frac{4x}{\pi} \arccos \frac{x}{2} - \frac{x^2}{\pi} \sqrt{4-x^2} \right) dx \\
 &= \int_0^2 \frac{4x^2}{\pi} \arccos \frac{x}{2} dx - \int_0^2 \frac{x^3}{\pi} \sqrt{4-x^2} dx
 \end{aligned}$$

第一項の積分を I_1 、第二項の積分を I_2 とおく。

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \int_0^2 \frac{4x^2}{\pi} \arccos \frac{x}{2} dx - \int_0^2 \frac{x^3}{\pi} \sqrt{4-x^2} dx \\
 &= I_1 - I_2
 \end{aligned}$$

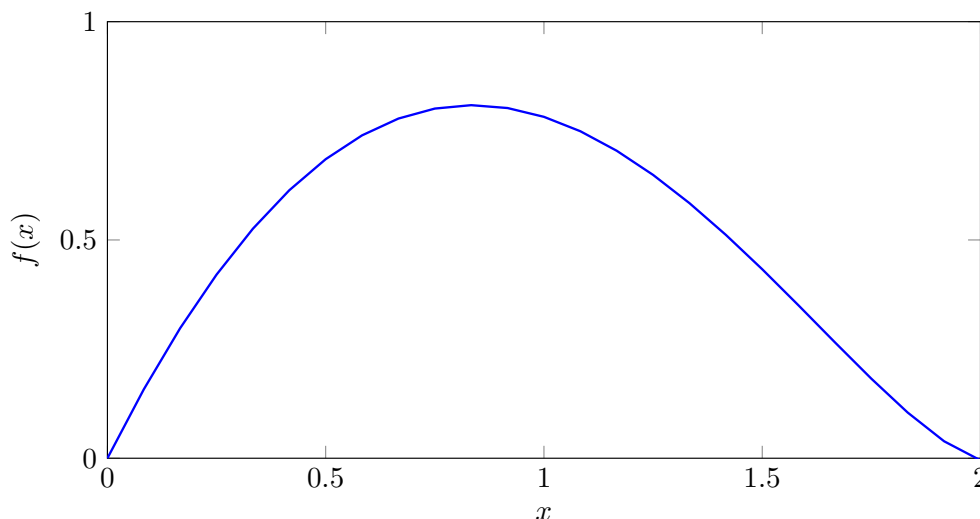


図7 円盤内の直線距離の確率密度関数

ここで I_1 は

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^2 \frac{4x^2}{\pi} \arccos \frac{x}{2} dx \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \arccos \frac{x}{2} dx \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{3}x^3 \arccos \frac{x}{2} \right]_0^2 \\
 &\quad - \frac{4}{\pi} \int_0^2 \frac{1}{3}x^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right) \frac{1}{2} dx \\
 &= \frac{4}{3\pi} (8 \cdot \arccos 1 - 0 \cdot \arccos 0) \\
 &\quad + \frac{4}{3\pi} \int_0^2 x^3 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= \frac{4}{3\pi} \int_0^2 x^3 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx
 \end{aligned}$$

である。変数変換 $x = 2 \sin \theta$ とおく。 x の微分は $dx = 2 \cos \theta d\theta$ である。積分範囲を以下に与える。

$$\begin{array}{l|l}
 x & 0 \rightarrow 2 \\
 \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}
 \end{array}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{4}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \sin^3 \theta \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 \theta}} 2 \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{32}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{32}{3\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{9\pi}
 \end{aligned}$$

となる。

I_2 を計算しよう。

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^3 \sqrt{4-x^2} dx$$

I_1 の計算と同様に $x = 2 \sin \theta$ と変換する。すると、

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \sin^3 \theta \cdot \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{32}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{32}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \cdot \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{32}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

となる。変数変換 $u = \cos \theta$ とおく。このとき u に対する微分は $du = -\sin \theta d\theta$ となる。積分範囲は以下の通り。

$$\begin{array}{l|l}
 \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\
 u & 1 \rightarrow 0
 \end{array}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{32}{\pi} \int_1^0 (u^2 - u^4) du = \frac{32}{\pi} \int_0^1 (u^2 - u^4) du \\
 &= \frac{32}{\pi} \left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \right]_0^1 = \frac{32}{\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{2}{15} = \frac{64}{15\pi}
 \end{aligned}$$

以上より、

$$E(x) = \frac{64}{9\pi} - \frac{64}{15\pi} = \frac{64 \cdot 5 - 64 \cdot 3}{45\pi} = \frac{128}{45\pi} \cong 0.905409$$

が確率密度関数 $f_X(x)$ の平均である。

3.2 確率変数 $g_i(x)$ の導出

3.2.1 乗客数1の場合 ($g_1(x)$)

確率変数 $g_1(x)$ は、2点の距離 x が決まった上で乗客数1の場合に遠回りする移動距離全体の平均である。ただし乗客が1組の場合はタクシーは遠回りしないので、移動距離は x のままである。したがって確率変数は

$$g_1(x) = x$$

となる。

3.2.2 乗客数2の場合 ($g_2(x)$)

乗客数2の場合の移動例を図8に示す。乗客1が s_1 から距離 x 離れた d_1 へ向かう。その途中 s_2 で乗客2が現れ、 d_2 へ寄り道するので、 $g_2(x) = ax + bx + cx$ となる。

乗客1の起点と終点を通り d_1 (終点1)を原点とする t 軸をとる。

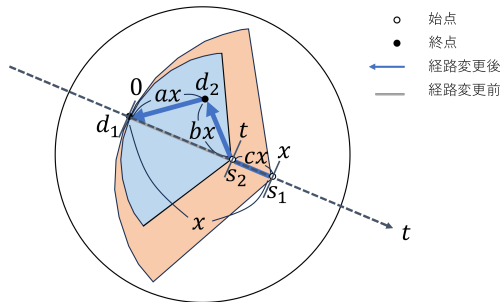


図8 乗客数2の移動例

c を求めよう。タクシーを利用する可能性のある乗客候補の起終点のみを考え、乗せる可能性のない乗客候補の起終点は考慮しない。乗客候補の起終点は t 軸上に一様分布するので、 d_1 と s_2 の距離 t の確率密度関数は、

$$f_s(t) = \frac{1}{x} \quad (7)$$

である。乗客候補の終点は、 s_1 から d_1 までを半径とする、 s_1 中心で d_1 が弧の中心点となる扇型(図8の

オレンジ色で示された扇型)の中で一様分布する。その内側の、 s_2 から d_1 までを半径とする、 s_2 中心で d_1 が弧の中心点となる扇型(図8の青で示された扇型)の内部に終点があればこれらの起終点ペアは採用される。したがって青い扇型の面積をオレンジ色の扇型の面積で割った、

$$f_d(t) = \frac{\frac{2}{3}\pi t^2}{\frac{2}{3}\pi x^2} = \frac{t^2}{x^2} \quad (8)$$

が起点が t に発生したもとの乗客2が採用される条件付き確率である。

実際に乗せる乗客の位置 t の確率密度関数を求める。式(7)と式(8)を掛けて、

$$f(t) = f_s(t)f_d(t) = \frac{t^2}{x^3} \quad (9)$$

とする。これを

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \quad (10)$$

が成り立つように規格化する。式(9)を式(10)に代入すると、

$$f(t) = \int_0^x \frac{t^2}{x^3} dt = \left[\frac{t^3}{3x^3} \right]_0^x = \frac{1}{3} \quad (11)$$

となる。式(11)より、 $f(t)$ に3を掛ければ式(10)が成り立つことから、 $f(t)$ を改めて

$$f(t) = \frac{3}{x^3} t^2$$

とする。 t の期待値は

$$t = \int_0^x t \cdot \frac{3}{x^3} t^2 dt = \int_0^x \frac{3}{x^3} t^3 dt = \left[\frac{3}{4x^3} t^4 \right]_0^x = \frac{3}{4} x$$

である。 $cx = x - t$ より、 c が次のように求まる。

$$c = \frac{1}{4} \quad (12)$$

次に b を求める。 s_2 から d_1 までの長さが $\frac{3}{4}x$ であることから、 bx を半径 $v (= \frac{3}{4}x)$ とする円内の各点から原点への距離の期待値とみなす。これは扇型から円に変換しても、原点と各点の距離の期待値は変化しないことによる。確率変数は $\sqrt{y^2 + z^2}$ で確率密度関数は $\frac{1}{\pi v^2}$ で積分範囲は $D = \{x^2 + y^2 \leq v^2\}$ な

ので、

$$bx = \int \int_D \sqrt{y^2 + z^2} \frac{1}{\pi v^2} dydz$$

となる。 $y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ とおくと、ヤコビアンは r であり、積分範囲は $E = \{0 \leq r \leq v, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に移る。すると、

$$\begin{aligned} bx &= \frac{1}{\pi v^2} \int_0^{2\pi} \int_0^v r^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi v^2} [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^v \\ &= \frac{2}{3} v \\ &= \frac{1}{2} x \quad (\because v = \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$b = \frac{1}{2} \quad (13)$$

が得られる。

最後に a は*2、

$$a = -\frac{33\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{9\sqrt{3} \log 3}{32\pi} + \frac{8}{\pi} \quad (14)$$

である。

以上の式(12)、式(13)、式(14)より、 $g_2(x)$ が求まる。

$$g_2(x) = (a + b + c)x = kx \cong 1.19259x$$

3.2.3 乗客数3の場合 ($g_3(x)$)

乗客数3の場合は、起点3が下図の[d1,d2]間で現れるか[d2,s2]間で現れるかの2つに場合分けをして、それぞれの確率を求める*3。

図9から、乗客3の移動可能な範囲である扇型は、乗客2のときの形がそのまま入れ子構造になっていることがわかる。これは、乗合タクシーが既に乗車している客よりも近い位置を目的地として、かつ追加の乗客は前の乗客が発生した区間で乗せると仮定したためである。前節で導出した結果を活用して、乗客が現れた区間の距離を k 倍とすることで $g_3(x)$ も導出することが可能である。以上から[d1,d2]間で現れる確率と[d2,s2]間で現れる確率

をそれぞれ求めればよい。[d1,d2]間か[d2,s2]間どちらかでは条件に適合する乗客が現れる前提を考慮すると、

- 事象A：[d1,d2]間で条件にマッチする乗客3が乗ってくる事象
- 事象B：[d2,s2]間で条件にマッチする乗客3が乗ってくる事象
- 事象C：[d1,d2]間か[d2,s2]間どちらかで条件にマッチする乗客3が乗ってくる事象

とする。

まずは $P(A|C)$ ([d1,d2]間か[d2,s2]間どちらかで現れるという上で[d1,d2]間で乗客が現れる確率)から求める。ベイズの定理より、

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} \quad (15)$$

である。 $P(C|A), P(A), P(C)$ をそれぞれ求めると、道幅を仮に dz として、

$$\begin{aligned} P(C|A) &= 1 \\ P(A) &= \frac{a^3 dz}{9\pi} \\ P(C) &= \frac{(a^3 + b^3) dz}{9\pi} \end{aligned}$$

となる。これらを式(15)に代入して、

$$P(A|C) = \frac{a^3}{a^3 + b^3} \quad (16)$$

が得られる。同様の操作を行えば $P(B|C)$ も得られ、

$$P(B|C) = \frac{b^3}{a^3 + b^3} \quad (17)$$

これらの割合は乗客数4以降でも同様に用いる。

式(16)と式(17)、 $g_2(x)$ の結果(乗客が現れる区間で k 倍になること)を利用すると確率変数は以下のような式(18)となる。

$$\begin{aligned} g_3(x) &= \left(\frac{a^3(ka + b)}{a^3 + b^3} + \frac{b^3(a + kb)}{a^3 + b^3} + c \right) x \\ &\cong 1.28437x \end{aligned} \quad (18)$$

3.2.4 乗客数4の場合 ($g_4(x)$)

乗客が4組の場合は3組のときと同様の考え方より、起点4の発生位置で4つに場合分けを行えば確

*2 この導出については、より詳細には文献[7]を参照されたい。

*3 [s1,s2]間で現れたらそれはもはや乗客2である。

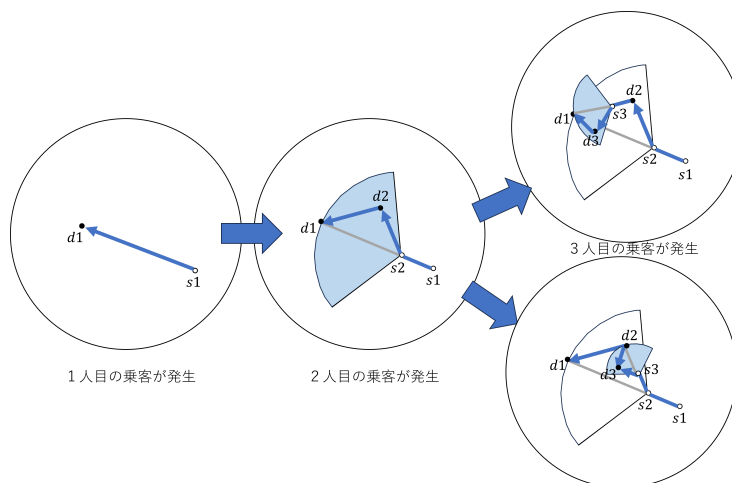


図9 乗客数3の移動例

率変数は以下のような式(19)となる。

$$\begin{aligned}
 g_4(x) = & \left(\frac{a^3}{a^3 + b^3} \left(\frac{a^3}{a^3 + b^3} (ka + b + c)a \right. \right. \\
 & + \frac{b^3}{a^3 + b^3} (a + kb + c)a + b) \\
 & + \frac{b^3}{a^3 + b^3} \left(a + \frac{a^3}{a^3 + b^3} (ka + b + c)b \right) \quad (19) \\
 & + \frac{b^3}{a^3 + b^3} (a + kb + c)b \\
 & \left. + c \right) x \cong 1.32809x
 \end{aligned}$$

3.2.5 乗客数*i*の場合 ($g_i(x)$)

以上を一般化して $g_i(x)$ を求めたい。 $g_1(x)$ から $g_2(x)$ の増加量 Δg_1 、 $g_2(x)$ から $g_3(x)$ の増加量 Δg_2 のように増加量を表現する。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \Delta g_1 &= (k - 1)x \\
 \Delta g_2 &= (P(A|C)(k - 1)a + P(B|C)(k - 1)b)x \\
 \Delta g_3 &= (P(A|C)^2(k - 1)a^2 + \\
 & \quad 2P(A|C)P(B|C)(k - 1)ab + \\
 & \quad P(B|C)^2(k - 1)b^2)x
 \end{aligned}$$

となる。これを一般化すると、

$$\Delta g_i = (k - 1)(P(A|C)a + P(B|C)b)^{i-1}x$$

である。よって、 $g_i(x)$ は Δg_i を用いて、漸化式

$$g_i = g_{i-1} + \Delta g_{i-1}$$

で表現できる。これは、 $q = (k - 1)x \cong 1.08$, $r =$

$P(A|C)a + P(B|C)b \cong 0.31$ として、

$$g_i = g_1 + \frac{q}{1 - r} - \frac{qr^{i-1}}{1 - r}$$

と求められる*4。この式から、 $i \rightarrow \infty$ とすれば、

$$g_\infty = g_1 + \frac{q}{1 - r} \cong 1.406350x$$

が求められる。

3.3 乗客数ごとの平均移動距離 x_i と平均移動距離 X の算出

乗客数ごとの平均移動距離は $g(x)$ と $f_X(x)$ を(1)式に代入して求める。計算結果は表2となる。

乗客数が*i*人ちょうどとなる確率 P_i を適切に重み付けして平均移動距離 X を計算する。乗客はポアソン分布で発生すると仮定する。すなわち、 $P_i = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!}$ である。ただし乗客が1人以上の場合を前提にしているので、乗客の平均発生数を μ として、追加で発生する乗客数の平均を $\lambda = \mu - 1$ とする*6。テンソウが最大12人乗りであることも踏まえて、 $\mu = 1, \dots, 8$ としたときの X の計算結果を表3に示す。

*4 $a_i = pa_{i-1} + qr^{i-1}$ 型の漸化式だと見なして計算している

*5 ちなみに、 $x_1 = \frac{128}{45\pi}$ である。

*6 λ は追加の乗客数の平均を表す。

表2 乗客数ごとの平均移動距離 x_i

乗客数 i	平均移動距離 x_i	x_1 との比率 g_i/x
1	0.905415 ^{*5}	1.000000
2	1.079797	1.192600
3	1.162591	1.284042
4	1.201900	1.327458
5	1.220563	1.348071
6	1.229424	1.357857
7	1.233631	1.362504
8	1.235629	1.364710
9	1.236577	1.365757
10	1.237027	1.366255
11	1.237241	1.366491
12	1.237343	1.366603
∞	1.237434	1.366704

表3 平均移動距離 X

乗客の平均発生数 μ	平均移動距離 X	$\mu = 1$ のときとの比率
1	0.905415	1.000000
1.5	0.982097	1.084693
2	1.041069	1.149826
2.5	1.086421	1.199915
3	1.121299	1.238436
3.5	1.148121	1.268061
4	1.168749	1.290843
5	1.196812	1.321838
6	1.213409	1.340169
8	1.229031	1.357423

4 まとめ

本研究では先行研究を踏襲した上で乗合タクシーの平均移動距離の数理モデル化と計算を行った。乗客数ごとの平均移動距離と一般的な平均移動距離を求めた。乗客数ごとの平均移動距離 x_i は乗客数が無限に増えたとしても $x_\infty = 1.273283$ であり、乗客数1と比べて約1.406350程度に収まる。移動距離はさほど増えないということが分かった。ただしこれはあくまで「乗合タクシーは既に乗車している客よりも近い位置を目的地とする追加の客を乗せてLIFOで移動し、かつ追加の乗客は前の乗客が発生した区間で発生とする」という強力な仮定を用いた上での結果である。この仮定が緩和した場合のモデル化は今後の課題である。

本研究では x と p を完全に独立なものとして扱った。実際には独立ではなく相互に複雑に影響しあうことが予想される。乗客が沢山現れるような都市であれば、行き先がマッチする客の現れる位置が今より近い位置になることは十分想定される。

最後に、クロフトンの微分方程式という手法についてだ。一般的に、固定点から任意の点への平均距離を計算するのは容易だが、任意の点から任意の点への平均距離の計算は困難である場合が多い。しかしクロフトンの微分方程式という手法を用いればそういった問題でも確率密度関数を求める事が可能である。そこから平均を求められるのが本手法の有用な点である。

参考文献

- [1] Fairthorne, D.(1964): The distance between random points in two concentric circles, *Biometrika*,51,pp.275-277.
- [2] Fairthorne, D.(1965): The distance between pairs of points in towns of simple geometrical shapes, Proceedings of the 2nd International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow, OECD, pp.391-406.
- [3] Kendall,M.G. and P.A.P. Moran(1963): *Geometrical Probability*, Charles Griffin and Company Limited.
- [4] Prudnikov,A.P., Brychkov,Yu.A and O.I. Marichev (1986): *Integrals and Series, More Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [5] Vaughan,R.(1987):*Urban Spatial Traffic Patterns*, Pion.
- [6] Yuichi Kozakai ,Yoichi Shimakawa and Hiroyuki Goto(2024), Mathematical model to determine average travel distance of shared taxi, Proceedings of the 5th Asia Pacific Conference on Industrial Engineering and Operations Management, Tokyo, Japan,,DOI: 10.46254/AP05.20240034
- [7] 堀龍一,小林隆史,高原勇,大澤義昭,“扇形内・扇形間における直線移動の距離とその応用”,日本都市計画学会都市計画論文集,Vol52,No3,1335,(2017)