5205

微分形式を用いたMaxwell 理論の考察

A comment on Maxwell's theory using differential forms

08316　北村徳隆

指導教員　山野邉基雄

1．研究の目的

本研究では物理学の理論に関してより理解を深めることを目的としている. 具体的な内容としては, 微分形式とよばれる数学上のツールを電磁気学の理論, すなわち Maxwell 理論に適用し, そこから得られる興味深いモデルについて考察を行う. 研究を行うためには, 電磁気学, 微分形式, 解析力学, 特殊相対性理論, Riemann 幾何学, 場の古典論などの知識が必須であり, 研究を進める過程でこれらについて学ぶ.

2．研究の背景

電磁気学の理論はよく知られた Maxwell 方程式によって記述される. しかし, その理論においては電気と磁気は非対称な関係となっている. そこで, 興味あるモデルとしてモノポール（磁気単極子）が存在する拡張された Maxwell 理論を考える. モノポールは実在しない（観測されていない）粒子であるが, これを導入することで Maxwell 理論に対称性を持たせることができる. 通常の Maxwell 理論は *E-B* 対応とよばれる考え方に基づく. これはモノポールが存在せず, 電流が磁場を生み出すとした考え方である. モノポールの導入により, 磁気に関する Coulomb の法則が成立することが仮定でき, 自然な形で工学の分野で用いられる *E-H* 対応の電磁気学を考えることができる. さらに, 通常の Maxwell 理論では電荷と電流, すなわち電磁カレントのみが存在するが, 拡張された Maxwell 理論ではこれに加え, 磁荷と磁流, つまりモノポールカレントが存在する. このように物質場に関しても対称性を持たせることができる.

3．微分形式を用いた Maxwell 理論

モノポールを導入するにあたって, Maxwell 理論を微分形式で扱う [1]. 微分形式を用いるメリットとしては, 第 1 に de Rham-Kodaira-Hodge の分解定理が利用できること, 第 2 に Maxwell 理論を数学的な手法により導出できることが挙げられる. 電磁場のテンソルは *d*-バウンダリーと δ-バウンダリーの 2 つの部分

$$\delta F^{(2)} = dA^{(1)} + \delta B^{(3)} \tag{1}$$

に分けられる. 但し $A^{(1)}$は 1-形式場, $B^{(3)}$は 3-形式場である. 前者の部分からは通常の Maxwell 理論が, 後者の部分からはモノポールの存在する Maxwell 理論が自然に導かれる. その表式は

$$\delta F^{(2)} = J^{(1)}, \quad dF^{(2)} = K^{(3)} \tag{2}$$

となる. ここで $J^{(1)}$は電磁カレントを表し, $K^{(3)}$はモノポールカレントを表す. この式は曲がった D 次元時空で成立する.

4．モノポールが存在する Maxwell 理論

物理法則の定式化の際には一般に変分原理を指導原理とする. 実際, 通常の Maxwell 理論は変分原理から導くことができる. そこで, モノポールの存在する Maxwell 理論が, ラグランジアンをもとに変分原理から導出できることを示す. 但しここでは平らな空間であるとして議論する. 場のラグランジアンは電磁場のテンソルを用いて

$$\mathcal{L}_{\rm gauge} = -\tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3}$$

となることは既に示されている. δ-バウンダリーは 3-形式場を用いて表されるため, 物質場の候補として 3-形式もしくは($D-3$)-形式が考えられる. これらに対応する描像は stringあるいは *p*-braneとなる. 特殊なケースとして $D=4$ の場合, 1-形式 $K^{(1)}$をモノポールカレントを表す物質場とすることができ, これは点粒子描像に対応する. ここで相互作用を表すラグランジアンを通常の Maxwell 理論とのアナロジーにより, ゲージ場と物質場のテンソルの縮約をとったスカラーであると仮定し

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -K^{\mu}B_{\mu} \tag{4}$$

と定義する. 但し B_μ は 3-形式場の双対テンソルである. 変分原理を適用すると

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta\textstyle\int(\mathcal{L}_{\rm int} + \mathcal{L}_{\rm gauge})d^4u \\ &= \textstyle\int(-K^{\sigma} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho F_{\mu\nu})\delta B_\sigma d^4u\end{aligned} \tag{5}$$

となり, 停留条件 $\delta S = 0$ からモノポールに関する Maxwell 方程式が得られる.

5．まとめ

よく知られた通常の Maxwell 方程式と, 得られたモノポールに関する Maxwell 方程式を共変形式（相対論的表現）で書くと

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^{\mu}, \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = K^{\mu} \tag{6}$$

となる. これはまさに Dirac が提唱したモノポールを含む Maxwell 理論 [2]である. 以上のように我々は 4 次元時空において電気と磁気に関する対称性を持ったモデルを示すことができた. 今後の展望としては, D 次元時空における相互作用ラグランジアンがどのように与えられるのかを考察することなどが考えられる.

参考文献

[1]Tadashi MIYAZAKI, *Strings and p-branes with or without spin degrees of freedom and q-form fields* (1996), hep-th/9609186.

[2]P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 133 (1931), 60.